Egzamin z Matematyki Obliczeniowej, II rok Mat.

(*Ściśle tajne* przed godz. 15:00 30 czerwca 2023.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Należy rozwiązać 4 (cztery) zadania z podanych pięciu. Bardzo duży wpływ na ocenę będzie miała czytelność rozwiązań i poprawność uzasadnienia każdej odpowiedzi.

1. Macierz $H = I - 2vv^T$ jest określona za pomocą pewnego (nieznanego) wektora $v \in \mathbb{R}^n$, takiego że $\|v\|_2 = 1$. Należy znaleźć wektory i wartości własne macierzy $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ danej wzorem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & H \\ 4H & 0 \end{bmatrix}.$$

Czy prosta metoda potęgowa może być w tym przypadku skuteczna? Jaka metoda wydaje się najlepsza do rozwiązania tego zadania?

2. Skonstruuj wielomian w stopnia co najwyżej 5 spełniający warunki interpolacyjne podane w tabelce, przedstawiając go w bazie Newtona odpowiadającej punktom $0, 0, 0, 1, 2, 2$.

x	0	1	2
$w(x)$	0	-4	-6
$w'(x)$	-3		5
$w''(x)$			24

Następnie oblicz $w''(0)$.

3. Funkcja sklejana s stopnia 2 z węzłami $u_i = i$ dla $i = 0, \ldots, N$, ma spełniać warunki interpolacyjne podane w środkach przedziałów między tymi

+/- węzłami. Zatem dla $i = 0, \ldots, N-1$ ma być $s(i + 0.5) = a_i$, gdzie liczby a_i są dane, oraz $s(i) = b_i$, przy czym liczby b_i należy dobrać tak, aby funkcja s w węźle i miała ciągłą pochodną.

Wyprowadź równanie (z danymi a_{i-1} i a_i i niewiadomymi b_{i-1}, b_i oraz b_{i+1}), którego spełnienie to zapewnia.

Czy układ tych równań, z dołączonymi warunkami brzegowymi określonymi przez ustalenie liczb b_0 i b_N ma jednoznaczne rozwiązanie? Odpowiedź uzasadnij.

4. Znajdź pierwsze trzy wielomiany z rodziny wielomianów ortogonalnych dla iloczynu skalarnego określonego wzorem

$$\langle f, g\rangle \overset{\text{def}}{=} \int_{-1}^{1} f(x)g(x)x^2\,dx.$$

Możesz dokonać tego przez ortogonalizację Grama–Schmidta bazy potęgowej lub za pomocą formuły trójczłonowej.

Znajdź wielomian p^* stopnia co najwyżej 2, będący optymalnym przybliżeniem funkcji $f(x) = x^4$ w sensie aproksymacji średniokwadratowej, w normie związanej z podanym wyżej iloczynem skalarnym. Wielomian p^* przedstaw w znalezionej bazie ortogonalnej.

5. Znajdź kwadraturę Gaussa czwartego rzędu, przybliżającą funkcjonał

$$I(f) \overset{\text{def}}{=} \int_{-1}^{1} f(x)x^2\,dx,$$

i znajdź wzór na oszacowanie błędu tej kwadratury dla funkcji klasy $C^4[-1, 1]$.

Wskazówka: Możesz skorzystać z rozwiązania poprzedniego zadania.